

Concursul de Matematică
al Facultății de Matematică și Informatică
Ediția a II-a, 21 mai 2016

Clasa a XII-a

1. Fie $a \in \mathbb{R}$ oarecare, x_1, x_2 și x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - 3X^2 + 5X - a$, și determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}.$$

- Determinați x_1, x_2 și x_3 dacă $a = 3$.
- Arătați că valoarea determinantului Δ nu depinde de a .
- Arătați că, pentru orice valoare a lui $a \in \mathbb{R}$, polinomul f are exact o rădăcină reală.

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ trei numere reale distincte două câte două, iar A matricea sistemului liniar de ecuații

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^3x + b^3y + c^3z = 1. \end{cases}$$

- Arătați că $\det(A) = (a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$.
- Rezolvați sistemul în cazul în care $a + b + c \neq 0$.
- Arătați că dacă $a + b + c = 0$, atunci sistemul este incompatibil.

3. Se consideră funcția: $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ definită prin $f(x) = x(1 + \ln x)$.

- Studiați monotonia lui f .
- Arătați că f este convexă.
- Arătați că f este bijectivă și calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x) \ln x}{x}$.
- Calculați $\int_1^e f(x) dx$.

4. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ admite primitive și calculați $\int f(x) dx$.