Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul Facultăţii de Matematică şi Informatică
21 mai 2016
Clasa a XI-a

1. Calculaţi valorile următoarelor limite:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cdot \cos 2x}{x^2}$.

2. Spunem că un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ are proprietatea (R) dacă verifică egalitatea

$$6x_{n+2}-x_{n+1}-x_n=0$$

pentru orice $n\geq 0$.

(a) Arătaţi că şirurile $(y_n)_{n\geq 0}$ şi $(z_n)_{n\geq 0}$ definite prin

$$y_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n, z_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n,\ (\forall)n\geq 0$$

au proprietatea (R).

(b) Arătaţi că dacă $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ şi şirurile $(u_n)_{n\geq 0},(v_n)_{n\geq 0}$ au proprietatea (R), atunci şirul $(\alpha u_n+\beta v_n)_{n\geq 0}$ are de asemenea proprietatea (R).

(c) Arătaţi că dacă $a,b\in\mathbb{R}$, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir care are proprietatea (R) şi pentru care $x_0=a, x_1=b$, atunci există şi sunt unic determinate două numere reale C,D astfel încât

$$x_n=C\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+D\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

pentru orice $n\geq 0$.

(d) Arătaţi că orice şir cu proprietatea (R) este convergent şi are limita 0.

3. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A)=\operatorname{tr}(A)=1$, unde $\operatorname{tr}(A):=a+d$ este urma matricei A.

(a) Arătaţi că $A^2+I_2=A$.

(b) Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii $\{A^n : n\in\mathbb{N}\}$.

(c) Arătaţi că ecuaţia $X^{2016}=I_2$ are o infinitate de soluţii $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det(X)=\operatorname{tr}(X)=1$.

4. Fie $a>0$, $a\neq 1$, un număr real fixat. Fie funcţia $F_a:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F_a(x)=\begin{pmatrix}\cos_a x & \sin_a x\\ \sin_a x & \cos_a x\end{pmatrix}$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$, unde $\sin_a x:=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$, $\cos_a x:=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

(a) Arătaţi că $F_a(x)\cdot F_a(y)=F_a(x+y)$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

(b) Studiaţi injectivitatea şi surjectivitatea funcţiei $G_a:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $G_a(x)=(F_a(x))^{2016}$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

(c) Rezolvaţi ecuaţia $\operatorname{tr}(G_a(x))=2\det(G_a(x))$.