Universitatea de Vest Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de Matematică al Facultăţii de Matematică şi Informatică Ediţia a II-a, 21 mai 2016

Soluţii şi barem de corectare la Clasa a XII-a

1. *Fie $a \in \mathbb{R}$ oarecare, x_1, x_2 şi x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - 3X^2 + 5X - a$, şi determinantul*

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}.$$

a) Determinaţi x_1, x_2 şi x_3 dacă $a = 3$.
b) Arătaţi că valoarea determinantului Δ nu depinde de a.
c) Arătaţi că, pentru orice valoare a lui $a \in \mathbb{R}$, polinomul f are exact o rădăcină reală.

Soluţie:

start .... $1p$

a) Notăm cu $\tilde{f}$ funcţia polinomială asociată polinomului f. Deoarece suma coeficienţilor lui f este 0, rezultă că $\tilde{f}(1) = 0$, astfel că o rădăcină a lui f este 1 .... $1p$,
iar f se descompune $f = (X-1)(X^2 - 2X + 3)$ .... $1p$.
Rezultă că $x_1 = 1$, iar $x_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{2}$ se obţin rezolvând ecuaţia $x^2 - 2x + 3 = 0$ .... $1p$.

b) Din relaţiile lui Viéte avem că
$x_1 + x_2 + x_3 = 3$
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 5$ .... $1p$.
$x_1x_2x_3 = a$

Calculând determinantul Δ avem atunci $\Delta = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$ .... $1p$
şi $\Delta = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3) =$
$= (x_1 + x_2 + x_3)((x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)) = 3(3^2 - 3\cdot 5) = -18$ nu depinde de valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ .... $1p$

c) Deoarece $\tilde{f}$ este o funcţie polinomială, ea este continuă, şi cum $\lim\limits_{x\to-\infty} \tilde{f}(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} \tilde{f}(x) = \infty$, rezultă că f are cel puţin o rădăcină reală(putem considera că x_1 este aceasta) .... $1p$
Cum $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 3^2 - 2\cdot 5 = -1 < 0$, cel puţin o rădăcină a lui f este complexă nereală(putem considera că x_2 este aceasta) .... $1p$
Dar atunci, cum f este cu coeficienţi reali, dacă $x_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, atunci $x_3 = \overline{x_2} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ şi f are exact o rădăcină reală .... $1p$

2. *Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ trei numere reale distincte două câte două, iar A matricea sistemului liniar de ecuaţii*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^3x + b^3y + c^3z = 1. \end{cases}$$

a) Arătaţi că $\det(A) = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$.
b) Rezolvaţi sistemul în cazul în care $a+b+c \neq 0$.
c) Arătaţi că dacă $a+b+c=0$*, atunci sistemul este incompatibil.*

Soluţie:

start .... $1p$

a) Scăzând prima coloană din celelalte, avem

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2+ab+b^2 & a^2+ac+c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(ac+c^2-ab-b^2) =$$

$$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$ .... $3p.$

b) În acest caz putem aplica regula lui Cramer, deoarece $\delta = det(A) = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$. Atunci

$$\delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & b & c \\ 1 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = c-b\,, \quad \delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & c \\ a^3 & 1 & c^3 \end{vmatrix} = a-c\,, \quad \delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 0 \\ a^3 & b^3 & 1 \end{vmatrix} = b-a.$$

Obţinem

$$\begin{cases} x = \frac{\delta_x}{\delta} = \frac{1}{(a+b+c)(b-a)(c-a)}, \\ y = \frac{\delta_y}{\delta} = \frac{1}{(a+b+c)(a-b)(c-b)}, \\ z = \frac{\delta_z}{\delta} = \frac{1}{(a+b+c)(a-c)(b-c)}. \end{cases}$$ .... $3p.$

c) În acest caz, $\det(A) = 0$, iar

$$m_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b-a \neq 0$$

este un minor principal al matricei A. Dar atunci minorul caracteristic

$$m_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 0 \\ a^3 & b^3 & 1 \end{vmatrix} = b-a \neq 0\,,$$

astfel că sistemul este incompatibil. .... $3p.$

3. *Se consideră funcţia:* $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$ *definită prin* $f(x) = x(1+\ln x)$.
a) Studiaţi monotonia lui f.
b) Arătaţi că f *este convexă.*
c) Arătaţi că f *este bijectivă şi calculaţi* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f^{-1}(x)\ln x}{x}$.
d) Calculaţi $\int\limits_1^e f(x)dx$.

Soluţie:

start 1p

a) Calculează $f'(x) = 2 + \ln x > 0$, $\forall x \in [1, \infty)$, deci f este strict crescătoare 1p

b) Calculează $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, $\forall x \in (1, \infty)$, deci f este convexă 1p

c) f este strict crescătoare, rezultă f injectivă 1p

f este funcţie continuă şi $f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, rezultă f surjectivă 1p

Notăm $f^{-1}(x) = y$; când $x \to \infty$ rezultă $y \to \infty$. Avem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)\ln x}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{y \ln f(y)}{f(y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{\ln f(y)}{1+\ln y} = \lim_{y\to\infty} \frac{y f'(y)}{f(y)} = \lim_{y\to\infty} \frac{y(2+\ln y)}{y(1+\ln y)} = 1 \text{ .... } 3p$$

d) Integrăm prin părţi.

$$\int_1^e x(1+\ln x)dx = \frac{x^2}{2}(1+\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{3e^2}{4} - \frac{1}{4} \text{ .... } 2p$$

4. *Arătaţi că funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ *admite primitive şi calculaţi* $\int f(x)dx$.

Soluţie:

start 1p

$f(x) = \sqrt{x^2-2x+1} = |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$. Rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive pe $\mathbb{R}$ 2p

O primitivă F a lui f este de forma: $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - x + c_1, & x > 1 \\ c_2, & x = 1 \\ -\dfrac{x^2}{2} + x + c_3, & x < 1 \end{cases}$ 2p

F trebuie să fie continuă în $x_0 = 1$, deci $\lim\limits_{x\searrow 1} F(x) = \lim\limits_{x\nearrow 1} F(x) = F(1)$, de unde: $-\dfrac{1}{2} + c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2} + c_3$

şi obţinem $c_1 = c_2 + \dfrac{1}{2}$ şi $c_3 = c_2 - \dfrac{1}{2}$. Prin urmare, $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{1}{2} + c_2, & x > 1 \\ c_2, & x = 1 \\ -\dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{1}{2} + c_2, & x < 1 \end{cases}$ 2p

Aplicând consecinţa Teoremei lui Lagrange rezultă că F este derivabilă în $x_0 = 1$ 2p

Deci $\int f(x)dx = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{1}{2}, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ -\dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{1}{2}, & x < 1 \end{cases} + \mathscr{C}$ 1p