Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul Facultăţii de Matematică şi Informatică
21 mai 2016
Clasa a XI-a – Barem de corectare

1. Calculaţi valorile următoarelor limite:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x}{x^2}$.

Soluţie şi barem:
Observaţie: O soluţie corectă a problemei care utilizează regula lui L'Hôpital se punctează cu 10 puncte.
Start 1p
(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$$ 3p

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cdot\cos 2x}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}\\&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{2}+2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{1}{2}+2\cdot 1^2=\frac{5}{2}\end{aligned}$$ 6p

2. Spunem că un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ are proprietatea (R) dacă verifică egalitatea

$$6x_{n+2}-x_{n+1}-x_n=0$$

pentru orice $n\geq 0$.

(a) Arătaţi că şirurile $(y_n)_{n\geq 0}$ şi $(z_n)_{n\geq 0}$ definite prin

$$y_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ z_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n,\ (\forall)n\geq 0$$

au proprietatea (R).

(b) Arătaţi că dacă $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ şi şirurile $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$ au proprietatea (R), atunci şirul $(\alpha u_n+\beta v_n)_{n\geq 0}$ are de asemenea proprietatea (R).

(c) Arătaţi că dacă $a, b \in \mathbb{R}$, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir care are proprietatea (R) şi pentru care $x_0 = a, x_1 = b$, atunci există şi sunt unic determinate două numere reale C, D astfel încât

$$x_n = C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + D \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

pentru orice $n \geq 0$.

(d) Arătaţi că orice şir cu proprietatea (R) este convergent şi are limita 0.

Soluţie şi barem:

Start 1p

(a) Se verifică faptul că şirurile (y_n) şi (z_n) au proprietatea (R) prin calcul direct 2p

(b) Se scrie ce înseamnă că (u_n) şi (v_n) au proprietatea (R):

$6u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0;\ 6v_{n+2} - v_{n+1} - v_n = 0$ 1p

Se calculează

$6(\alpha u_{n+2}+\beta v_{n+2})-(\alpha u_{n+1}+\beta v_{n+1})-(\alpha u_n+\beta v_n) = \alpha\left(6u_{n+2} - u_{n+1} - u_n\right)+\beta\left(6v_{n+2} - v_{n+1} - v_n\right) = 0$ ... 1p

de unde rezultă că şirul $(\alpha u_n + \beta v_n)_{n\geq 0}$ are proprietatea (R)

(c) Se caută mai întâi valori ale lui C, D care să verifice pentru termenii iniţiali:

$$\begin{cases} C + D = a \\ C \cdot \dfrac{1}{2} + D \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) = b. \end{cases}$$

Se rezolvă sistemul liniar de mai sus cu necunoscutele C, D şi se obţine soluţia unică:

$C = \dfrac{2a+6b}{5};\ D = \dfrac{3a-6b}{5}$. 2p

Pentru valorile C, D astfel determinate se consideră şirul $t_n = C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + D \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$, $n \geq 0$. Avem evident $x_0 = t_0 = a;\ x_1 = t_1 = b$. Prin inducţie matematică se demonstrează că $x_n = t_n$, $\forall n \geq 0$. Afirmaţia este adevărată pentru $n = 0$ şi $n = 1$; o presupunem adevărată pentru n şi $n+1$ şi o demonstrăm pentru $n+2$, observând în prealabil că din punctele (a) şi (b) rezultă că şirul (t_n) are şi el proprietatea (R):

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{6} = \frac{t_{n+1} + t_n}{6} = t_{n+2}$$

.... 2p

(d) Afirmaţia rezultă din expresia termenului general al unui şir cu proprietatea (R) obţinută la punctul (c) şi din faptul că şirurile (y_n) şi (z_n) sunt convergente cu limita 0 .... 1p

3. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A) = \operatorname{tr}(A) = 1$, unde $\operatorname{tr}(A) := a + d$ este urma matricei A.

(a) Arătaţi că $A^2 + I_2 = A$.

(b) Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii $\{A^n : n \in \mathbb{N}\}$.

(c) Arătaţi că ecuaţia $X^{2016} = I_2$ are o infinitate de soluţii $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det(X) = \operatorname{tr}(X) = 1$.

Soluţie şi barem:

Start .... $1p$

(a) Din $\det(A) = \operatorname{tr}(A) = 1$ obţine $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2-a+1}{b} & 1-a \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Deduce

$$A^2 = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ -\frac{a^2-a+1}{b} & -a \end{pmatrix},$$

şi obţine

$$A^2 + I_2 = A.$$

.... $2p$

(**Obs. Se punctează cu $2p$ şi soluţia directă, bazată pe aplicarea relaţiei Cayley-Hamilton pentru matricea A.**)

(b) Utilizând relaţia de la subpunctul (a), deduce $A^3 = A^2 - A = (A - I_2) - A = -I_2$ şi astfel prin înmulţire succesivă cu A obţine $A^4 = -A$, $A^5 = -A^2$, $A^6 = I_2$. Arată inductiv că $A^{6k} = I_2$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ (relaţia este evident adevărată pentru $k = 0$). Deduce astfel că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem $A^{6k+1} = A$, $A^{6k+2} = A^2$, $A^{6k+3} = -I_2$, $A^{6k+4} = -A$, $A^{6k+5} = -A^2$.. $3p$

Justifică faptul că matricele $\pm I_2, \pm A, \pm A^2$ sunt diferite, deduce $\{A^n : n \in \mathbb{N}\} = \{\pm I_2, \pm A, \pm A^2\}$ şi concluzionează că numărul de elemente ale mulţimii $\{A^n : n \in \mathbb{N}\}$ este 6. .... $2p$

(c) Din (a) deduce că matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică $\det(A) = \operatorname{tr}(A) = 1$ sunt de forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2-a+1}{b} & 1-a \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. .... $1p$

Folosind subpunctul (b) observă că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, avem că $A^{6k} = I_2$. Deoarece $2016 = 6 \cdot 336$, obţine concluzia. .... $1p$

(**Obs. Se punctează tot cu $1p$ dacă finalizează utilizând relaţia $A^{2016} = (A^3)^{672} = (-I_2)^{672} = I_2$.**)

4. Fie $a > 0$, $a \neq 1$ un număr real fixat. Fie funcţia $F_a : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F_a(x) = \begin{pmatrix} \cos_a x & \sin_a x \\ \sin_a x & \cos_a x \end{pmatrix}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, unde $\sin_a x := \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$, $\cos_a x := \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$.

(a) Arătaţi că $F_a(x) \cdot F_a(y) = F_a(x + y)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Studiaţi injectivitatea şi surjectivitatea funcţiei $G_a : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $G_a(x) = (F_a(x))^{2016}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

(c) Rezolvaţi ecuaţia $\operatorname{tr}(G_a(x)) = 2 \det(G_a(x))$.

Soluţie şi barem:

Start .... $1p$

(a) Deduce formulele

$$\sin_a(x+y) = \sin_a x \cdot \cos_a y + \sin_a y \cdot \cos_a x, \quad \cos_a(x+y) = \cos_a x \cdot \cos_a y + \sin_a x \cdot \sin_a y, \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R},$$

şi concluzionează că $F_a(x) \cdot F_a(y) = F_a(x + y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. .... $3p$

(b) Arată că $G_a : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este injectivă. Consideră $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $G_a(x) = G_a(y)$ şi deduce utilizând subpunctul (a): $F_a(2016 \cdot x) = F_a(2016 \cdot y) \Leftrightarrow [\sin_a(2016 \cdot x) = \sin_a(2016 \cdot y)$ şi $\cos_a(2016 \cdot x) = \cos_a(2016 \cdot y)]$. Prin adunarea relaţiilor obţine $\sin_a(2016 \cdot x) + \cos_a(2016 \cdot x) = \sin_a(2016 \cdot y) + \cos_a(2016 \cdot y) \Leftrightarrow a^{2016 \cdot x} = a^{2016 \cdot y}$ şi astfel deduce $x = y$, concluzionând că G_a este injectivă. .... $2p$

Arată că $G_a : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nu este surjectivă. Pentru matricea $Y = O_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nu există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $Y = G_a(x)$, deoarece $\det(G_a(x)) = (\det(F_a(x)))^{2016} = (\cos_a^2 x - \sin_a^2 x)^{2016} = 1^{2016} = 1$. .... $1p$

(**Obs. Se punctează tot cu $1p$ orice alegere corectă a unei matrice $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care nu există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $Y = G_a(x)$.**)

(c) Folosind relaţia $\cos_a^2 x - \sin_a^2 x = 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, deduce

$$\det(G_a(x)) = \det(F_a(2016 \cdot x)) = \cos_a^2(2016 \cdot x) - \sin_a^2(2016 \cdot x) = 1$$

şi astfel ecuaţia $\operatorname{tr}(G_a(x)) = 2 \det(G_a(x))$ devine

$$\operatorname{tr}(F_a(2016 \cdot x)) = 2 \Leftrightarrow \cos_a(2016 \cdot x) = 1 \Leftrightarrow a^{2016 \cdot x} + a^{-2016 \cdot x} = 2.$$

.... $2p$

Finalizează, concluzionând că ecuaţia $a^{2016 \cdot x} + a^{-2016 \cdot x} = 2$ are o unică soluţie, $x = 0$ şi în consecinţă $x = 0$ este unica soluţie a ecuaţiei $\operatorname{tr}(G_a(x)) = 2 \det(G_a(x))$. .... $1p$