Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul Facultăţii de Matematică şi Informatică
30 Mai 2015
Clasa a XII-a

1. Fie $a \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $\varepsilon^3 = 1$, matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

şi sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = a \\ x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z = a. \end{cases}$$

a) Să se arate că $\det(A) \in \mathbb{R} \cdot i$.
b) Să se arate că sistemul este compatibil determinat.
c) Să se rezolve sistemul.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ ale cărui rădăcini complexe se notează cu x_1, x_2, x_3.
a) Să se arate că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.
b) Sşe calculeze valoarea expresiei $E = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)$.
c) Să arate că exact una dintre rădăcinile lui f este reală şi că suma celorlalte două rădăcini este un număr real din intervalul $(2, 3)$.

3. Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.
a) Să se arate că $f(x) > 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$.
b) Să se arate că dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(f(x))$, atunci $(f(x) - x) \cdot g'(x) = 1, (\forall)x \in \mathbb{R}$.
c) Să se arate că $g(x) < x$, $(\forall)x > 0$.

4. Fie $(I_n)_{n\geq 1}$ şirul definit prin $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{4x+5}\, dx$.
a) Să se calculeze I_1.
b) Să se arate că

$$4I_{n+1} + 5I_n = \frac{1}{n+1},\ (\forall)n \geq 1.$$

c) Să se arate că $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi convergent la 0.
d) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.