

Concursul Facultății de Matematică și Informatică  
30 mai 2015  
Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

a) Să se arate că  $A^3 - A = A^2 - I_3$ .

b) Să se arate că  $A^n - A^{n-2} = A^2 - I_3$ ,  $(\forall)n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ .

c) Să se calculeze  $\det(A^n + A^{n-2})$ , unde  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ .

2. Se consideră matricele  $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1 \times 3}(\mathbb{R})$ ,  $K = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$  și  $A = KL$ .

a) Să se calculeze suma elementelor matricei  $A$ .

b) Să se arate că  $A^2 = 32 \cdot A$ .

c) Să se arate că  $\text{rang}(A^n) = 1$ ,  $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$ .

3. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ .

a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

b) Să se determine  $f'$ .

c) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției  $f$  către  $+\infty$ .

4. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \cos x$  și șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definit prin  $x_0 = 0, x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $(\forall)n \in \mathbb{N}$ .

a) Să se determine  $f'$  și să se arate că  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

b) Să se arate că  $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $(\forall)n \in \mathbb{N}$ .

c) Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge la  $\frac{\pi}{2}$ .