Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul Facultăţii de Matematică şi Informatică
30 Mai 2015
Clasa a XII-a

1. Fie $a \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $\varepsilon^3 = 1$, matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

şi sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = a \\ x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z = a. \end{cases}$$

a) Să se arate că $\det(A) \in \mathbb{R} \cdot i$.
b) Să se arate că sistemul este compatibil determinat.
c) Să se rezolve sistemul.

Soluţie şi barem:
start . . . . $1p$
a) Prin conjugare, avem că

$$\overline{\det(A)} = \det(\overline{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix} = -\det(A),$$

de unde rezultă că $\det(A) \in \mathbb{R} \cdot i$(varianta alternativă - prin calcul direct se obţine că $\det(A) = 3(\varepsilon^2 - \varepsilon) = 3i\sqrt{3} \in \mathbb{R} \cdot i$). . . . . $3p$
b) Deoarece $\det(A) = 3i\sqrt{3} \neq 0$, rezultă că $3 = rang(A) \leq rang(A|B) \leq 3$, astfel că $rang(A) = rang(A|B)$ şi sistemul este compatibil. Cum $rang(A) = 3 =$ numărul necunoscutelor, rezultă că sistemul este compatibil determinat. . . . . $3p$
c) Cum $(x = a, y = 0, z = 0)$ este o soluţie, iar sistemul este compatibil determinat, soluţia este unică.(variantă alternativă - cu regula lui Cramer, $\Delta_x = a \cdot \det(A)$, $\Delta_y = 0$ şi $\Delta_z = 0$, de unde rezultă $x = a, y = 0, z = 0$). . . . . $3p$

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ ale cărui rădăcini complexe se notează cu x_1, x_2, x_3.
a) Să se arate că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.
b) Să se calculeze valoarea expresiei $E = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)$.
c) Să arate că exact una dintre rădăcinile lui f este reală şi că suma celorlalte două rădăcini

este un număr real din intervalul $(2, 3)$.

Soluţie şi barem:

start .... $1p$

a) Din relaţiile lui Viéte, avem că $s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2$ şi $s_3 = x_1x_2x_3 = -1 \neq 0$, astfel că cele trei rădăcini sunt nenule. Dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, atunci ar rezulta $S_2 > 0$. Dar $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = s_1^2 - 2s_2 = 0$, de unde rezultă că nu toate cele trei rădăcini pot fi reale. .... $3p$

b) Avem că $E = -(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3) = -f(-1) = -((-1)^3 - 2(-1)^2 + 2(-1) + 1) = -(-4) = 4$.(varianta alternativă - $E = 1 + s_1 + s_2 + s_3 = 1 + 2 + 2 - 1 = 4$.) .... $3p$

c) Deoarece funcţia polinomială asociată polinomului f este continuă, deci are proprietatea valorilor intermediare, iar $f(-1) = -4 < 0$ şi $f(0) = 1 > 0$, rezultă că f are o rădăcină reală în intervalul $(-1, 0)$. Putem considera că aceasta este x_1. Cum nu toate rădăcinile sunt reale, putem considera că $x_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dar atunci, cum $f \in \mathbb{R}[X]$, rezultă că $x_3 = \overline{x_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Prin urmare, f are o singură rădăcină reală. .... $2p$

Suma celor două rădăcini nereale este $x_2 + x_3 = s_1 - x_1 = 2 - x_1 \in (2, 3)$. .... $1p$

3. Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

a) Să se arate că $f(x) > 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(f(x))$, atunci $(f(x) - x) \cdot g'(x) = 1, (\forall)x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $g(x) < x$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.

Soluţie şi barem:

start .... $1p$

a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem că $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$, şi prin urmare $f(x) > 0$. .... $3p$

b) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem că $g(x) = ln(f(x)) = ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ şi $f(x) - x = \sqrt{x^2 + 1}$, astfel că $(f(x) - x) \cdot g'(x) = 1$. .... $3p$

c) Funcţia $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definită prin $h(x) = x - g(x)$ are derivata $h'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \neq 0$, astfel că h este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Dar atunci $h(x) > h(0) = 0, \forall x > 0$, de unde rezultă că $g(x) < x, \forall x > 0$. .... $3p$

4. Fie $(I_n)_{n\geq 1}$ şirul definit prin $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{4x + 5}\, dx$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că

$$4I_{n+1} + 5I_n = \frac{1}{n + 1},\ (\forall)n \geq 1.$$

c) Să se arate că $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi convergent la 0.

d) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Soluţie şi barem:

start .... $1p$

a) Deoarece $x = \frac{1}{4}(4x+5) - \frac{5}{4}$, avem că

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{4x+5}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4(4x+5)}\right)\,dx = \left(\frac{x}{4} - \frac{5}{16}ln\left(x+\frac{5}{4}\right)\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{5}{16}ln\left(\frac{9}{5}\right).$$

....2p

b) Pentru orice $n \geq 1$ avem

$$4I_{n+1} + 5I_n = \int_0^1 \frac{4x^{n+1}}{4x+5}\,dx + \int_0^1 \frac{5x^n}{4x+5}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(4x+5)}{4x+5}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}.$$

....2p

c) Pentru orice $x \in (0,1)$ au loc inegalităţile $0 < x^{n+1} < x^n$ şi $0 < \frac{x^{n+1}}{4x+5} < \frac{x^n}{4x+5}$, astfel că $0 < I_{n+1} < I_n$, deci şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. 1p

Folosind identitatea de la b), avem atunci că

$$\frac{1}{9(n+1)} = \frac{1}{9}(4I_{n+1}+5I_n) < I_n < \frac{1}{9}(4I_n + 5I_{n-1}) = \frac{1}{9n} \quad, \ \forall n \geq 2.$$

Cu criteriul cleştelui rezultă atunci că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. 2p

d) Deoarece

$$\frac{n}{9(n+1)} < nI_n < \frac{1}{9} \quad, \ \forall n \geq 2,$$

obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{9}$. 2p