Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul Facultăţii de Matematică şi Informatică
30 mai 2015
Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $A^3 - A = A^2 - \mathrm{I}_3$.
b) Să se arate că $A^n - A^{n-2} = A^2 - \mathrm{I}_3,\ (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
c) Să se calculeze $\det(A^n + A^{n-2})$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

Soluţie şi barem:
start .... $1p$
a) Avem că

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

astfel că

$$A^2 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^3 - A.$$

.... $3p$
b) Demonstrăm proprietatea prin inducţie după $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. Notând cu $P(n)$ afirmaţia "$A^n - A^{n-2} = A^2 - \mathrm{I}_3$", $P(3)$ este adevărată conform punctului a). Dacă pentru un $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, $P(n)$ este adevărată, atunci $A^{n+1} - A^{n-1} = A \cdot (A^n - A^{n-2}) = A(A^2 - \mathrm{I}_3) = A^2 - \mathrm{I}_3$, astfel că $P(n+1)$ este adevărată. Rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. .... $3p$
c) Cum $\det(A) = -1$, iar $\det(A^2 + I_3) = 8$, rezultă că $\det(A^n + A^{n-2}) = \det(A^{n-2}) \cdot \det(A^2 + I_3) = 8 \cdot (-1)^n$. .... $3p$

2. Se consideră matricele $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$, $K = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ şi $A = KL$.

a) Să se calculeze suma elementelor matricei A.
b) Să se arate că $A^2 = 32 \cdot A$.
c) Să se arate că $\mathrm{rang}(A^n) = 1,\ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie şi barem:
start .... $1p$

a) Deoarece

$$A = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 & 4\cdot 2 & 4\cdot 3 \\ 5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot 3 \\ 6\cdot 1 & 6\cdot 2 & 6\cdot 3 \end{pmatrix},$$

notând cu $S(A)$ suma elementelor matricei A, este evident că $S(A) = (4+5+6)\cdot(1+2+3) = 15\cdot 6 = 90$. . . . . $3p$

b) Deoarece $LK = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6) = (32) \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{R} = \mathbb{R}$, avem $A^2 = (KL)(KL) = K((LK)L) = K(32\cdot L) = 32\cdot(KL) = 32\cdot A$. . . . . $3p$

c) Deoarece $A \neq O_{3\times 3}$, rezultă că $rang(A) \geq 1$. Pe de altă parte, are loc inegalitatea $rang(A) = rang(KL) \leq min(rang(K), rang(L)) = 1$, astfel că $rang(A) = 1$. Ţinând cont de b), prin inducţie după $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, rezultă că $A^n = 32^{n-1}\cdot A$, astfel că $rang(A^n) = rang(A) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. . . . . $3p$

3. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x\cdot \sin\dfrac{1}{x}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) Să se determine f'.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei la graficul funcţiei f către $+\infty$.

Soluţie şi barem:

start . . . . $1p$

a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$ avem că $|f(x)| = \left| x\cdot \sin\dfrac{1}{x}\right| \leq |x|$, şi rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. . . . . $3p$

b) Avem

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad, \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

. . . . $3p$

c) Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1,$$

rezultă că $y = 1$ este ecuaţia asimptotei orizontale la graficul funcţiei f către $+\infty$. . . . . $3p$

4. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \cos x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_0 = 0, x_{n+1} = f(x_n)$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$.

a) Să se determine f' şi să se arate că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Să se arate că $x_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$.

c) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la $\dfrac{\pi}{2}$.

Soluţie şi barem:

start . . . . $1p$

a) Funcţia f fiind elementară, este continuă şi indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$. Avem că

$$f'(x) = 1 - \sin(x) \quad , \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

....2p

Deoarece $f'(x) > 0$, $\forall x \in (2k\pi, 2(k+1)\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$, f este strict crescătoare pe fiecare interval $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$, cu $k \in \mathbb{Z}$, deci f este strict crescătoare pe $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, 2(k+1)\pi] = \mathbb{R}$.........1$p$

b) Demonstrăm afirmaţia prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 0$, $x_0 = 0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Dacă presupunem că pentru un $n \in \mathbb{N}$ are loc relaţia $x_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, atunci folosind monotonia funcţiei f avem că

$$x_{n+1} = f(x_n) \in \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Rezultă că $x_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. .... 3$p$

c) Arătăm prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$ că $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 0$ avem $x_1 = f(x_0) = f(0) = 1 > 0 = x_0$. Presupunând acum că pentru un $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea $x_{n+1} > x_n$, din monotonia funcţiei f rezultă că $x_{n+2} = f(x_{n+1}) > f(x_n) = x_{n+1}$. Rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător, iar conform punctului b) este mărginit. Prin urmare şirul este convergent, având limita $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem

$$l = f(l) = l + \cos(l),$$

astfel că $\cos(l) = 0$, de unde rezultă că $l = \frac{\pi}{2}$..3p